Appendix A: Duration

Bei der Analyse festverzinslicher Wertpapiere stellt die Kapitalbindungsdauer ein wichtiges Kriterium dar. Auch wenn häufig die Restlaufzeit zur Beurteilung unterschiedlicher Anleihen herangezogen wird, berücksichtigt diese Überlegung nicht, dass im Regelfall schon vor der Fälligkeit Zinszahlungen erfolgen, die bei der Analyse eine wichtige Rolle spielen, da sie zum aktuellen Zinssatz wieder reinvestiert werden können. Als besseres Kriterium wurde daher die Duration entwickelt, die sich in modifizierter Form auch zum Abschätzen des Kursänderungsrisikos eignet.

Das Konzept der Duration geht auf Frederick Macaulay (1938) zurück und wurde in den siebziger Jahren wiederentdeckt. Die Duration stellt so etwas wie die „durchschnittliche Bindungsdauer“ des eingesetzten Kapitals bis zum vollständigen Rückfluss oder die „durchschnittliche gewichtete Fälligkeit“ der Kapitalanlage dar. Da jedoch keiner der genannten Ausdrücke eine zutreffende Bezeichnung des Risikomaßes Duration darstellt, wird im weiteren Verlauf stets von Duration gesprochen.

In Abschnitt 3.4.1 wurde gezeigt, dass sich der Wert einer optionsfreien Anleihe mit glatter Restlaufzeit formal wie folgt bestimmen lässt:

$$P = \frac{C}{1+y} + \frac{C}{(1+y)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+y)^n} + \frac{M}{(1+y)^n} \tag{3-37}$$

Der Zusammenhang zwischen Zinsänderung und Marktwertänderung (Kursänderung) ergibt sich, indem der Barwert der Anleihe bezüglich des Marktzinses y abgeleitet wird:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{(-1)C}{(1+y)^2} + \frac{(-2)C}{(1+y)^3} + \cdots + \frac{(-n)C}{(1+y)^{n+1}} + \frac{(-n)M}{(1+y)^{n+1}} \tag{3-38}$$

Durch Umformen von Gleichung (3-38) erhält man:

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{1}{1+y}\left[\frac{1C}{1+y} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \cdots + \frac{nC}{(1+y)^n} + \frac{nM}{(1+y)^n}\right] \tag{3-39}$$

Der Ausdruck in der Klammer macht deutlich, dass die Zins- und Tilgungsfälligkeiten t, $t = 1, 2, \ldots, n$, mit den Barwerten der dazugehörigen Zahlungen C_t gewichtet werden.

Gleichung (3-39) stellt somit die *absolute* Änderung des Preises der Anleihe dar, wenn sich der Marktzins um einen kleinen Betrag dy (z.B. 0,1%-Punkte) ändert.

Dividiert man Gleichung (3-39) auf beiden Seiten durch P, erhält man die *relative* (prozentuale) Veränderung $\frac{dP}{P}$ des Anleihepreises in Abhängigkeit von der Zinssatzänderung dy:

$$\frac{dP}{dy}\frac{1}{P} = -\frac{1}{1+y}\left[\frac{1C}{1+y} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \cdots + \frac{nC}{(1+y)^n} + \frac{nM}{(1+y)^n}\right]\frac{1}{P} \tag{3-40}$$

Der Ausdruck in der Klammer dividiert durch P wird allgemein als Macaulay Duration D_{Mac} bezeichnet. Damit erhält man:

$$D_{Mac} = \frac{\frac{1C}{1+y} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \cdots + \frac{nC}{(1+y)^n} + \frac{nM}{(1+y)^n}}{P} \tag{3-41}$$

oder

$$D_{Mac} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{tC}{(1+y)^t} + \frac{nM}{(1+y)^n}}{P} \qquad (3\text{-}42)$$

Durch Einsetzen der Macaulay Duration D_{Mac} in die Gleichung (3-40) ist die *relative* (prozentuale) Änderung des Preises näherungsweise[1] gegeben durch

$$\frac{dP}{dy}\frac{1}{P} = -\frac{D_{Mac}}{1+y} \qquad (3\text{-}43)$$

Das Verhältnis $\frac{D_{Mac}}{1+y}$ wird als modified Duration, D_{mod}, bezeichnet.

$$D_{\text{mod}} = \frac{D_{Mac}}{1+y} \qquad (3\text{-}44)$$

Setzt man Gleichung (3-44) in Gleichung (3-43) erhält man:

$$\frac{dP}{dy}\frac{1}{P} = -D_{\text{mod}} \qquad (3\text{-}45)$$

Gleichung (3-45) verdeutlicht, dass eine Änderung des Marktzinses eine gegenläufige Änderung der Marktwerte bewirken: Steigt (sinkt) der Marktzinssatz, dann sinken (steigen) die Marktwerte.

Beispiel 3-27

Es soll die Macaulay Duration und die modified Duration für eine 8%-Kuponanleihe mit einer Laufzeit von 5 Jahren und einem Nennwert von 100 ermittelt werden, wenn der Marktzins 8,5% beträgt.

Zunächst wird der Preis der Anleihe berechnet:

$$P = \frac{8}{1{,}085} + \frac{8}{(1{,}085)^2} + \frac{8}{(1{,}085)^3} + \frac{8}{(1{,}085)^4} + \frac{108}{(1{,}085)^5} = 98{,}0297$$

Mit (3-41) erhält man die Duration (in Jahren):

$$D_{Mac} = \frac{\frac{(1)8}{1{,}085} + \frac{(2)8}{(1{,}085)^2} + \frac{(3)8}{(1{,}085)^3} + \frac{(4)8}{(1{,}085)^4} + \frac{(5)108}{(1{,}085)^5}}{98{,}0297} = 4{,}3045$$

und mit (3-44) die modified Duration:

$$D_{\text{mod}} = \frac{4{,}3045}{1{,}085} = 3{,}97$$

[1] Näherungsweise deshalb, weil die Ableitung eine lineare Approximation von *P* darstellt, *P(y)* aber keine lineare Funktion ist, sondern eine konvexe Funktion.

In Abb. 5-5 ist die Berechnung in tabellarischer Form dargestellt.

Jahr (t)	Zahlung	Barwert der Zahlung (PV)	$t \times PV$
1	8	7,3733	7,3733
2	8	6,7956	13,5913
3	8	6,2633	18,7898
4	8	5,7726	23,0904
5	108	71,8249	359,1245
Summe		98,0297	421,9693

Abb. 5-5 Berechnung der Duration einer 5-jährigen 8%-Anleihe bei 8,5% Marktrendite

$$D_{Mac} = \frac{421{,}9693}{98{,}0297} = 4{,}3045$$

$$D_{mod} = \frac{4{,}3045}{1{,}085} = 3{,}97$$

Da die Berechnung der Duration nach Formel (3-41) mit einem verhältnismäßig hohem Rechenaufwand verbunden ist, soll im Folgenden eine Formel präsentiert werden, mit der die Duration unmittelbar bestimmt werden kann.

Nach Gleichung (3-3) kann der Wert einer Anleihe bei gegebener Marktrendite y wie folgt bestimmt werden:

$$P = C\left[\frac{(1+y)^n - 1}{y(1+y)^n}\right] + \frac{M}{(1+y)^n} = \mathrm{C}y^{-1} - Cy^{-1}(1+y)^{-n} + M(1+y)^{-n}$$

Die erste Ableitung nach y liefert:

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dy} &= -Cy^{-2} - C\left[-y^{-2}(1+y)^{-n} - n(1+y)^{-n-1}y^{-1}\right] + \left[-n(1+y)^{-n-1}M\right] \\
&= -\frac{C}{y^2} + \frac{C}{y^2(1+y)^n} + \frac{Cn}{y(1+y)^{n+1}} \\
&= -\frac{1}{1+y}\left[\frac{C(1+y)}{y^2} - \frac{C}{y^2(1+y)^{n-1}} - \frac{Cn}{y(1+y)^n} + \frac{nM}{(1+y)^n}\right] \\
&= -\frac{1}{1+y}\left[\frac{C(1+y)^{n+1} - C(1+y) - Cny}{y^2(1+y)^n} + \frac{nM}{(1+y)^n}\right]
\end{aligned}$$

Dividiert man beide Seiten der Gleichung durch P erhält man:

$$\frac{dP}{dy}\frac{1}{P} = -\frac{1}{1+y}\left[\frac{C(1+y)^{n+1} - C(1+y) - Cny}{y^2(1+y)^n} + \frac{nM}{(1+y)^n}\right]\frac{1}{P}$$

Der Ausdruck in der Klammer dividiert durch P stellt die Macaulay Duration dar. Fasst man noch die Terme mit C zusammen, erhält man die Duration für den Fall einer glatten Restlaufzeit:

$$D_{Mac} = \frac{C\left[\frac{(1+y)^{n+1} - (1+y) - ny}{y^2(1+y)^n}\right] + \frac{nM}{(1+y)^n}}{P} \qquad (3\text{-}46)$$

Dividiert man Gleichung (3-46) mit $(1+y)$, erhält man die modified Duration, D_{mod}.[2]

Equation (3-46) can be further simplified expressing the price of the bond P in the denominator by equation (3-21) with a discount rate of y:

$$D_{Mac} = \frac{C\left[\frac{(1+y)^{n+1} - (1+y) - ny}{y^2(1+y)^n}\right] + \frac{nM}{(1+y)^n}}{C\left[\frac{(1+y)^n - 1}{y(1+y)^n}\right] + \frac{M}{(1+y)^n}} \qquad (3\text{-}61)$$

Multiplying each term in the numerator and denominator by $y(1+y)^n$,

$$D_{Mac} = \frac{\frac{1+y}{y}C\left[(1+y)^n - 1\right] - nC + ynM}{C\left[(1+y)^n - 1\right] + yM}$$

[2] Dividiert man Gleichung (3-46) mit $(1+y)$ und vereinfacht den Ausdruck weiter, erhält man eine andere Formel zur Berechnung der modified Duration:

$$D_{mod} = \frac{\frac{C}{y^2}\left[1 - \frac{1}{(1+y)^n}\right] + \frac{n(M - C/y)}{(1+y)^{n+1}}}{P}$$

Adding and subtracting $(1+y)M$ to the numerator of the above expression,

$$D_{Mac} = \frac{\frac{1+y}{y}\left\{C\left[(1+y)^n - 1\right] + yM\right\} - (1+y)M - nC + ynM}{C\left[(1+y)^n - 1\right] + yM}$$

$$= \frac{1+y}{y} - \frac{(1+y)M + nC - ynM}{C\left[(1+y)^n - 1\right] + yM}$$

Dividing the second term of the above expression by *M* and rearranging gives

$$D_{Mac} = \frac{1}{y} + 1 - \frac{(1+y) + n\left(\frac{C}{M} - y\right)}{\frac{C}{M}(1+y)^n - \left(\frac{C}{M} - y\right)}$$

Finally, let $\frac{C}{M} = c$ be the coupon rate (expressed in decimal), Macauly duration is given by

$$D_{Mac} = \frac{1}{y} + 1 - \frac{(1+y) + n(c-y)}{c(1+y)^n - (c-y)} \qquad (3\text{-}62)$$

Illustration 3-40: To demonstrate how to use equation (3-60) and (3-62) consider the 5-year 8% coupon bond selling at €98,0297 to yield 8,5% in Illustration 3-39.

With equation (3-60) we obtain

$$D_{Mac} = \frac{€8\left[\frac{(1{,}085)^6 - (1{,}085) - 5(0{,}085)}{(0{,}085)^2(1{,}085)^5}\right] + \frac{5(€100)}{(1{,}085)^5}}{€98{,}0297} = 4{,}3045$$

Equation (3-62) delivers the same result:

$$D_{Mac} = \frac{1}{0{,}085} + 1 - \frac{1 + 0{,}085 + 5(0{,}08 - 0{,}085)}{0{,}08(1{,}085)^5 - (0{,}08 - 0{,}085)} = 4{,}3045$$